

Travaux Dirigés de Méthodes Mathématiques

Fiche 2 : Commutateurs d'opérateurs

Dans les exercices I, II et III qui suivent, on considère des opérateurs agissant sur des fonctions $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$. Dans chacun de ces exercices, les fonctions considérées sont supposées être “suffisamment” dérivables pour qu'on puisse appliquer les opérateurs différentiels discutés.

L'opérateur de dérivation ∂_x agit sur une fonction f selon

$$(\partial_x f)(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x) = \frac{df}{dx}(x) = f'(x) \quad \forall x \in \mathbf{R}$$

et l'opérateur \hat{x} de “multiplication par x ” agit sur f selon

$$(\hat{x}f)(x) = x f(x) \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Pour une fonction continue $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$, l'opérateur $g(\hat{x})$ agit sur la fonction f comme “multiplication par $g(x)$ ” :

$$(g(\hat{x})f)(x) = g(x) f(x) \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Si la fonction $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ est développable en série entière à l'origine (donc $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$), alors la définition précédente de l'opérateur $g(\hat{x})$ équivaut à définir cet opérateur par la formule $g(\hat{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \hat{x}^n$.

Pour simplifier la notation, l'opérateur \hat{x} sera simplement noté par x et l'opérateur $g(\hat{x})$ par $g(x)$.

I. Opérateur fonction de x

(1) Soit $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$. Montrer que l'opérateur x commute avec l'opérateur $g(x)$.

(2) Montrer que si un opérateur A commute avec x , il commute avec toute fonction g de x . Pour la démonstration, on supposera que la fonction $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ est développable en série entière à l'origine. (Cependant nous notons que le résultat est valable de manière plus générale.)

II. Commutateur fondamental

Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction dérivable.

- (1) Déterminer le commutateur $[\partial_x, f]$.
- (2) En déduire $[\partial_x, x]$.
- (3) En déduire $[P, x]$ où $P = \frac{\hbar}{i} \partial_x$ (avec $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ et $h =$ constante de Planck).

III. Calcul de commutateur

Soit

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(x + \partial_x - \frac{1}{x} K \right)$$
$$B = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(x - \partial_x + \frac{1}{x} K \right),$$

où K est un opérateur qui commute avec x et avec ∂_x . Calculer $[A, B]$.

IV. Commutateur et anticommutateur

Déterminer l'expression la plus simple pour le commutateur $[A, B]$ et l'anticommutateur $\{A, B\}$ des opérateurs

$$A = x \frac{d}{dx}, \quad B = \frac{1}{x} \frac{d}{dx}.$$

(On ne se préoccupera pas de la singularité en $x = 0$.)

V. Relations de commutation canoniques et moment cinétique en MQ

Dans cet exercice, nous étudierons des opérateurs agissant sur des fonctions $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{C}$, les éléments de \mathbf{R}^3 étant notés par $\vec{r} = (x, y, z)$. L'opérateur de dérivation ∂_x agit sur la fonction f selon

$$(\partial_x f)(\vec{r}) = \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{r}) \quad \forall \vec{r} \in \mathbf{R}^3$$

et l'opérateur \hat{x} de "multiplication par x " agit sur f selon

$$(\hat{x}f)(\vec{r}) = x f(\vec{r}) \quad \forall \vec{r} \in \mathbf{R}^3.$$

Les opérateurs de dérivation ∂_y, ∂_z et les opérateurs de multiplication \hat{y}, \hat{z} sont définis de manière analogue.

Pour une particule dans \mathbf{R}^3 , on considère en mécanique quantique les *opérateurs* vectoriels de position et d'impulsion définis par

$$\begin{aligned} \hat{\vec{r}} &= (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \\ \hat{\vec{p}} &= (\hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z) = \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}. \end{aligned}$$

(1) Pour les composantes des opérateurs vectoriels $\hat{\vec{r}}$ et $\hat{\vec{p}}$, déterminer tous les commutateurs non nuls.

(2) On considère l'opérateur vectoriel du moment cinétique $\hat{\vec{L}} = \hat{\vec{r}} \wedge \hat{\vec{p}}$ avec les composantes

$$\begin{aligned} \hat{L}_x &= \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y \\ \hat{L}_y &= \hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z \\ \hat{L}_z &= \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x. \end{aligned}$$

Déterminer $[\hat{L}_x, \hat{L}_y]$ en utilisant les résultats trouvés en (1) et écrire le résultat sous forme d'une combinaison linéaire des opérateurs $\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z$.